

la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a pour colonnes les vecteurs de cette base.

Le théorème affirme que la matrice associée à la projection orthogonale $\text{proj}_W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est

$$A_{\text{proj}_W} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Calculons chaque terme.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$A(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Enfin,

$$A_{\text{proj}_W} = A(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\text{proj}_W(\vec{x}) = A_{\text{proj}_W} \vec{x} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

6.10 Angle entre deux vecteurs

Théorème 6.60

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration. Si $\vec{u} = \vec{0}$, l'inégalité est vérifiée (avec égalité).

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$. La norme de la projection orthogonale de \vec{v} sur \vec{u} vaut :

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} \right\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$$

Le théorème de Pythagore appliqué à $\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v})$ donne :

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\|^2 + \|\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\|^2 \geq \|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\|^2$$

Donc $\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| \leq \|\vec{v}\|$, c'est-à-dire $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|} \leq \|\vec{v}\|$, d'où l'inégalité.

L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u})$. □

Définition 6.61

Angle entre deux vecteurs

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non nuls. L'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \in [-1, 1].$$

L'angle entre \vec{u} et \vec{v} est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

De manière équivalente : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

Exemples. 1. Angle entre $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^2 :

$$\cos \theta = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

2. Angle entre $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 :

$$\cos \theta = \frac{3 - 8 + 0}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.47$$

3. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

6.11 Espaces préhilbertiens

Définition 6.62

Produit scalaire sur un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire* sur V est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $u, v, w \in V$ et tout $c \in \mathbb{R}$:

Symétrie $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Linéarité $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$

Positivité $\langle u, u \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*. S'il est de dimension finie, on parle d'*espace euclidien*.

Exemples (Produit scalaire pondéré sur \mathbb{R}^2). Soit $a, b > 0$. Pour $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ dans

\mathbb{R}^2 , on pose :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a u_1 v_1 + b u_2 v_2$$

Vérifions les axiomes :

— **Symétrie** : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a u_1 v_1 + b u_2 v_2 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

— **Linéarité** : $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = a(u_1 + v_1)w_1 + b(u_2 + v_2)w_2 = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

— $\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = a(cu_1)v_1 + b(cu_2)v_2 = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

— **Positivité** : $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = a u_1^2 + b u_2^2 \geq 0$, et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$

Par exemple, avec $a = 4$, $b = 5$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 = 24 - 10 = 14$$

Exemples. Produit scalaire sur les polynômes

Soit t_0, t_1, \dots, t_n des réels distincts. Pour $p, q \in \mathbb{P}_n$, on définit :

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n p(t_k)q(t_k)$$

Les axiomes de symétrie, linéarité et homogénéité sont immédiats. Pour la positivité : $\langle p, p \rangle = \sum_{k=0}^n [p(t_k)]^2 \geq 0$, et si $\langle p, p \rangle = 0$, alors p s'annule en $n + 1$ points distincts, donc $p = 0$.

Par exemple, dans \mathbb{P}_2 avec $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$, pour $p(t) = 12t^2$ et $q(t) = 2t - 1$:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1) = (0)(-1) + (3)(0) + (12)(1) = 12$$

Exemples. Produit scalaire intégral sur $C([a, b])$

Pour $f, g \in C([a, b])$, on définit :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Les axiomes de symétrie, linéarité et homogénéité découlent des propriétés de l'intégrale. Pour la positivité : $\langle f, f \rangle = \int_a^b [f(t)]^2 dt \geq 0$, et si cette intégrale est nulle avec f continue, alors $f = 0$.

Par exemple, dans $C([0, 1])$ avec $f(t) = t$ et $g(t) = t^2$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}, \quad \langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Remarque 6.6.0.63. Dans un espace préhilbertien de dimension finie, on définit la norme par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, la distance par $d(u, v) = \|u - v\|$, et l'orthogonalité par $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$. Le procédé de Gram-Schmidt et les théorèmes de projection orthogonale s'étendent à ce cadre.